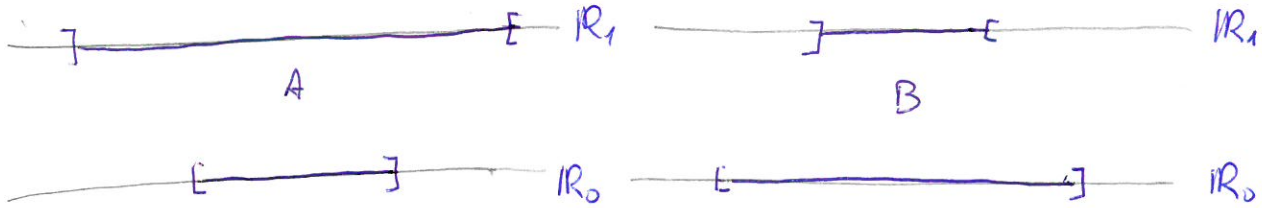
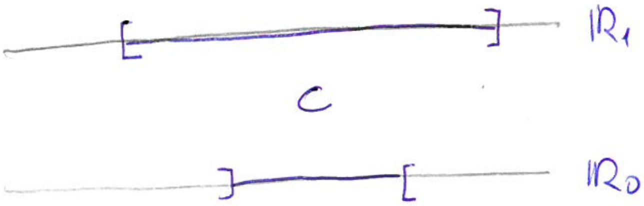
UMDT42 Topologie Algébrique - IE 1 (M1 MATHS 2018-2019) ①

Exo 1 $Y = \{0, 1\}$, $\tau_Y = \{\emptyset, \{0\}, Y\}$, $X = \mathbb{R} \times Y$.

(a)





On remarque que une base d'ouverts de X est donnée par les éléments de la forme $I \times Y$ et $I \times \{0\} =: I_0$

Pour vérifier si un ensemble K est compact, il suffit montrer que tout recouvrement de K par ouverts de la base admet un sous-recouvrement fini.

Les seules ouverts qui recouvrent ~~de~~ un ensemble de la forme K_1 sont de la forme $I \times Y$.

~~Donc~~ • A n'est pas compact, car le recouvrement de la forme $I_n :=]-2+\frac{1}{n}; 2-\frac{1}{n}[\times Y$ n'admet pas un sous-recouvrement fini.

De même, B n'est pas compact, car le recouvrement :

$\mathbb{R}_0$; $U_n =]-1+\frac{1}{n}; 1-\frac{1}{n}[$ n'admet pas un sous-recouvrement fini.

En fait, une condition nécessaire pour que $K \subset X$ soit compact est que $K \cap \mathbb{R}_1$ soit compact.

Pour C, on montre que il est compact.

En fait, si U_α est un recouvrement ouvert de C, il doit recouvrir $[-2,2] \times Y$, car pour recouvrir $[-2,2]_1$, il faut qu'il y ait un sous-recouvrement de U_α de la forme $V_\alpha \times Y$, t.q $\bigcup V_\alpha$ recouvre $[-2,2]$.

En étant $[-2,2]$ compact, il existe un sous recouvrement fini $(V_{\alpha_j})_{j=1\ldots n}$, et $(V_{\alpha_j} \times Y)_{j=1\ldots n}$ est un sous-recouvrement fini de C.

(b) On a déjà vu que si K est compact, alors $K \cap \mathbb{R}_1$ est compact (vu dans ~~X~~ $\mathbb{R}_1 \cong \mathbb{R}$).

Considérons $pr_1 : X \to \mathbb{R}$, $pr_1(x,y) = x$

pr_1 est continue, donc si K est compact, $pr_1(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$

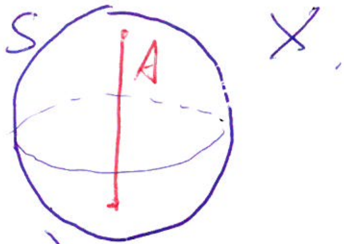
On vérifie que cela caractérise les compacts de X :

Si $K \cap \mathbb{R}_1$ et $pr_1(K)$ sont compacts, et U_α est un recouvrement ouvert de K, par des ouverts de la forme $V_\alpha \times Y$ ou $V'_\beta \times \{0\}$.

alors les $V_\alpha \times Y$ recouvrent $K \cap \mathbb{R}_1$ et donc il en existe une sous-famille finie $V_{\alpha_j} \times Y$ recouvrant $K \cap \mathbb{R}_1$.

De plus $(V_\alpha \times Y, V_\beta \times Y)$ recouvrent $pr_1(K)$, et il existe un sous-recouvrement fini $(V_{\alpha_j}, V_{\beta_j})$ qui recouvre $pr_1(K)$, et donc $V_{\alpha_j} \times Y$, $V_{\beta_j} \times \{o\}$ recouvrent K et K est compact.

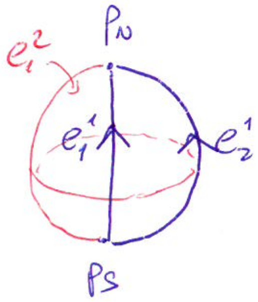
Exo 2.



(a) Structure de complexe cellulaire de X:

Option 1) $X_0 = \{p_N, p_S\}$ (identifiés à $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$).

$X_1 = X_0 \cup_{f_1^1} e_1^1 \cup_{f_2^1} e_2^1$ (deux 1-cellules), avec

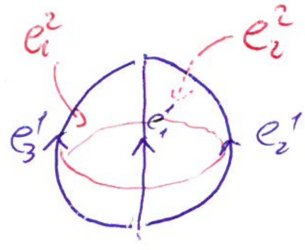


$f_1^1(+1) = f_2^1(1) = p_N$

$f_1^1(-1) = f_2^1(-1) = p_S$

$X_2 = X_1 \cup_{f_1^2} e_1^2$, avec

$$f_1^2(e^{2\pi i t}) = \begin{cases} 4t-1 \in e_2^1 & t \in [0; \frac{1}{2}] \\ -4t+3 \in e_2^1 & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Option 2: $X_0 = \{p_N, p_S\}$.

$X_1 = X_0 \cup_{f_1^1} e_1^1 \cup_{f_2^1} e_2^1 \cup_{f_3^1} e_3^1$

$f_j^1(+1) = p_N$ $f_j^1(-1) = p_S$ $\forall j = 1,2,3$.

$X_2 = X_1 \cup_{f_1^2} e_1^2 \cup_{f_2^2} e_2^2$.

avec : $f_j^2(e^{2\pi i t}) = \begin{cases} 4t-1 \in e_2^1 & t \in [0,\frac{1}{2}] \\ 3-4t \in e_3^1 & t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$ $j=1,2.$

(b) On remarque que $S/_R \cong \mathbb{RP}^2$, car R est la relation antipodale sur $S = \mathbb{S}^2$. Soit $\Phi : S/_{\mathbb{R}} \to \mathbb{RP}^2$ cet homéomorphisme.

~~Alors On définit~~: Il est donné par

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "pr_S"'] & \mathbb{RP}^2 \\ \mathbb{S}^2/_\sim \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

On définit $g : X \to \mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{S}^1$ par :

Si $p \in S$, $g(p) = i(p)$ (vu en $\mathbb{RP}^2$).

Si $p = (0,0,z) \in A$, $g(p) = e^{\pi i t}$ (vu en $\mathbb{S}^1$),

le bouquet étant fait sur le point $[0:0:1]$ de $\mathbb{RP}^2$ et sur le point $-1 = e^{\pi i(\pm 1)}$ de $\mathbb{S}^1$.

Cette application g est continue, car elle est continue sur S, continue sur A, et $g|_S \equiv g|_A$ (~~c'est le point~~ c'est la constante égale à q_0 le point où on colle $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{S}^1$.

Elle induit une application $f : X/_R \to \mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{S}^1$: en fait

$p_0 \sim p_1 \in S \Leftrightarrow$ ~~$i(p_0)$~~ $pr_S(p_0) = pr_S(p_1) \Leftrightarrow i(pr_S(p_0)) = \Phi(p_0) = \Phi(p_1) = i(pr_S(p_1))$.

~~Et~~ Le fait qu'on ait des "$\Leftrightarrow$" nous dit aussi que f est injective.

Elle est évidemment aussi surjective $(f(A/_R) = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{S}^1$ et

$f(S/R) = \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^2 \vee S^1$.

Donc f est une bijection continue.

Comme $X = S \cup A$ est compacte, X/R l'est aussi, et $\mathbb{R}P^2 \vee S^1$ est Hausdorff, on a que f est un homeomorphisme

Bonus:

Cas 2) Pour définir $f : X_2 \to X$, il suffit de définir sur $e_1^1 \cup e_1^2 \cup e_2^2$. On définit:

$$\underset{e_1^1 \cong [-1,1]}{f(t)} = (0,0,t), \quad \text{et}$$

$$\underset{e_1^2 \cong \mathbb{B}^2 \cong \mathbb{D}}{f(z)} = \left(\sqrt{1-|z|^2}; Re(-iz), Im(-iz)\right), \quad (*)$$

$$\underset{e_2^2 \cong \mathbb{B}^2 \cong \mathbb{D}}{f(z)} = \left(-\sqrt{1-|z|^2}; Re(-iz); Im(-iz)\right).$$

On peut vérifier que f est bien définie:

en: $e_2^2 \cap e_1^2$: i.e., $S^1 \subset \mathbb{B}^2$, $(|z|=1)$, on a $(0; Re(-iz), Im(-iz))$,

et en ∂e_1^1: on a $(0,0,1) = (0, Re(0), Im(i)) = (0,0,1)$

par rapport à la définition $(*)$

On voit que f est bijective et donc définit une bijection continue $X_2 \xrightarrow{f} X$, qui est un homeomorphisme car X_2 compact et X T_2.